будет изложено, позволяет исследовать задачу о парах Фипера для произвольных многочленов $P(z)$ и $P^*(z)$ в $H(\mathbb{C}^n)$.

С. Р. Насыров

Казань, snasyrov@ksu.ru

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ ПОЛИНОМА, УНИФОРМИЗИРУЮЩЕГО ЗАДАННУЮ КОМПАКТНУЮ РИМАНОВУ ПОВЕРХНОСТЬ С ПРОСТЫМИ КОНЕЧНЫМИ ТОЧКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ

Пусть задана односвязная n-листная компактная риманова поверхность над сферой Римана, которая над бесконечно удаленной точкой имеет точку ветвления порядка $(n-1)$. Будем предполагать, что остальные точки ветвления простые. По известной теореме униформизации существует полином $P(z)$, который отображает сферу Римана $\mathbb{C}$ на S. Без ограничения общности можно считать, что одна из точек ветвления S располагается над началом координат, $P(0)=0$, $P(z)\sim z^n$, $z\to\infty$. Обозначим через a_j, $1\leqslant j\leqslant n-1$, прообразы точек ветвления S, $a_{n-1}=0$. Тогда

$$P(z)=P(z;a_1,a_2,\dots,a_{n-1})=n\int_0^z\prod_{j=1}^{n-1}(\zeta-a_j)d\zeta. \qquad (1)$$

Так как риманова поверхность S известна, известны точки A_j, $1\leqslant j\leqslant n-1$, $A_{n-1}=0$, которые являются проекциями на плоскость точек ветвления. Важной задачей является нахождение точек a_j (акцессорных параметров). Конечно, по заданным A_j эти точки определяются неединственным образом. Система $P(a_j) = A_j$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$, является системой из $(n-2)$ алгебраических уравнений с $(n-2)$ неизвестными. Ее решение представляет известные сложности. Среди подходов к точному нахождению акцессорных параметров a_j отметим метод, основанный на использовании краевых задач для аналитических функций, разработанный в работах Э. И. Зверовича и его учеников (см., например, [1]).

Мы хотим предложить приближенный метод нахождения параметров a_j в интеграле (1). Суть его состоит в использовании "гладкого" соединения (гомотопии) поверхности S с некоторой поверхностью S_0, для которой соответствующие параметры a_j^0 известны. Прообраз этой гомотопии в пространстве акцессорных параметров дает гладкий путь в $\mathbb{R}^{n-2}$, который является интегральной кривой для системы $(n-2)$ обыкновенных дифференциальных уравнений, описываемой в теореме, приведенной ниже. Решая эту систему с начальным условием $a_j(t) = a_j^0$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$, получаем уравнение этой кривой, концевая точка которой даст значение параметров a_j для поверхности S.

Итак, пусть задана гладкая кривая $A_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ в пространстве $\mathbb{R}^{n-2}$, причем для некоторых известных параметров a_1^0, $a_2^0, \ldots, a_{n-1}^0$ имеем

$$P(a_j^0; a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{n-1}^0) = A_j(0), \quad 1 \leqslant j \leqslant n-2.$$

Требуется найти гладкую кривую $a_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в $\mathbb{R}^{n-2}$, такую, что

$$P(a_j(t); a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{n-1}(t)) = A_j(t),\ 1 \leqslant j \leqslant n-2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

причем $a_j(0) = a_j^0$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$.

Теорема. *Искомая кривая является решением задачи Коши для системы дифференциальных уравнений*

$$\dot{a}_l(t) = \sum_{k=1,k\neq l}^{n-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{B_k(t)} \frac{1}{a_k(t)-a_l(t)} +$$
$$+ \frac{\dot{A}_l(t)}{B_l(t)} \sum_{k=1,k\neq l}^{n-1} \frac{1}{a_k(t)-a_l(t)} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{B_k(t)a_k(t)},$$

где

$$B_k(t) = n \prod_{j=1,j\neq k}^{n-1} (a_k(t)-a_j(t)),$$

с начальным условием $a_l(0)=a_l^0$, $1 \leqslant l \leqslant n-2$.

На конкретных примерах показано, что с помощью предложенного метода можно быстро и эффективно находить акцессорные параметры в (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00381 и 09-01-97008-р_поволжье).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зверович Э. И. Алгебраический метод построения основных функционалов римановой поверхности, заданной в виде конечнолистной накрывающей сферы // Сиб. матем. журн. – 1987. – Т. 28. – № 6. – С. 32–43.